Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ARICI, LIVIU
Istoria opticii în Antichitate. crestomaţie / Liviu Arici. - Ed. a 2-a, adăug.. - Deva : Editura Emia, 2023

2 vol
ISBN 978-973-753-552-8
Vol. 2. : Concepţia matematică. - 2023. - Conţine bibliografie. - ISBN 978-973-753-554-2

53

Coperta 1: colaj: HERO DIN ALEXANDRIA, EUCLIDE, PTOLEMEU, ARHIMEDE (sursa: internet, pusă la dispoziție de autor)
Coperta 4: ARHINEDE CU OGLINDA INCENDIATOARE (sursa: internet, pusă la dispoziție de autor)
Tehnoredactare: Liviu Arici

Coperta: Codruț Sebastian Făgăraș

www.emia.ro
Casa de Editare Emia
e-mail: edituraemia@yahoo.com;
office@emia.ro

LIVIU ARICI

ISTORIA OPTICII ÎN ANTICHITATE - CRESTOMANȚIE -

VOLUMUL 2
CONCEPȚIA MATEMATICĂ

Ediția a 2-a, adăug.

Editura Emia

CUPRINS – Volumul al II-lea

EUCLID – OPTICA A[1]

Definiții[2]

1. Să considerăm că linii drepte trasate plecând din ochi, parcurg spații de dimensiuni extinse[3];

---

[1] Textul canonic după care s-a făcut traducerea este cel publicat în limbile greacă și latină în [4]. Aici există două variante ale "Opticii", intitulate, de obicei, Optica **A** și Optica **B** . Prima se consideră a fi Optica Genuina, adică cea originală, scrisă de Euclid, iar a doua o compilație mai târzie, aparținând lui Theon din Alexandria. Textul principal al Opticii **A** este manuscrisul *Vindobonensis phil. gr. 31*, iar al Opticii **B** , *Vaticanus graecus 204*.

[2] În limba greacă, cuvântul *Opoi* înseamnă ceva între definiție și postulat. Pe parcursul timpului, în diferite traduceri s-au folosit diferiți termeni. Noi am adoptat „definiții", ca în traducerea în latină a lui Theon din Alexandria [4].

[3] Între definiția în limba greacă și cea în limba latină există o deosebire, ceea ce a devenit pe parcurs subiectul analizei concepției lui Euclid asupra modului de propagare a acestor linii drepte care pleacă din ochi și cărora majoritatea le spun „raze vizuale". Iată definiția în limba greacă din textul atribuit lui Euclid: „*Υποχείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐξαγομένας εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι διάστημα μεγεθῶν μεγάλων.*" și definiția din textul atribuit lui Theon: "*Υποχείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ὄψεις χατ' εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι διάστημά τι ποιούσας ἀπ' ἀλλήλων.*" Variantele lor traduse în limba latină sunt: "*Ponatur, ab oculo rectas ductas lineas ferri spatio magnitudinum immensarum;*" , respectiv "*Supponamus, radios ex oculo secundum rectas lineas ferri inter se distantes.*"

Cu excepția primei definiții și a unei mici diferențe la a doua definiție, celelalte definiții sunt identice atât în originalul atribuit lui Euclid, cât și în versiunea atribuită lui Theon din Alexandria [4]. În [5], prima definiție e tradusă parțial, fără a se da vreo explicație de ce traducerea este incompletă. În [6], considerând că enunțul e mai puțin clar, se traduce așa: "*Supposons que les lignes droites qui émanent de l'oeil se propagent à divergence des grandes grandeurs*"; considerând că nu se poate vorbi de existența a unor "intervale de mărimi nedefinite între raze" și având în vedere că un astfel de concept nu are aplicații în teoremele care urmează se cerea o reevaluare care i se pare autorului mai puțin ambiguă dacă se vorbește de raze care prezintă o divergență oarecare una față de alta: "*Supposons que les raions visuels émanés de l'oeil se propagent suivant des lignes droites faisant quelque divergence entre elles.*" În final însă, Ver Eecke conchide că existența intervalului între raze nu este admisibilă și-l citează pe Ptolemeu care susținea necesitatea unui fascicul continuu de raze, fără intervale de niciun fel între ele.

În [7] apare o nouă ipoteză și anume cea a unui text inițial corupt. De la acest text grec corupt a apărut în traducerile latine medievale expresia "*magnitudum immensarum*" care a dus la următoarele interpretări:

- propagarea rectilinie pe distanțe infinite a razelor plecate din ochi, dar aceasta intra în contradicție cu ceea ce exprimă teorema a treia, adică cu concepția conform căreia vederea unui obiect se poate face până la o anumită distanță, dincolo de care el nu mai este vizibil.

- suspectând omisiunea unui cuvânt sau grup de litere din textul grec inițial, după o analiză filologică riguroasă, autorii lucrării [7] ajung la următoarea traducere: "cu o divergență (unghiulară) de amplitudini foarte diferite". Această traducere este susținută de o examinare mai amplă a gândirii lui Euclid care este adeptul "razelor vizuale" plecate din ochi și care formează un ansamblu discret cu o anumită distanță unghiulară reciprocă finită.

Astfel, prima definiție se referă la o distanță unghiulară (*διαστημα μεγεθων μεγαλλοιων*) în loc de distanță liniară *(διαστημα μεγεθων μεγαλων)*. Prima definiție astfel restaurată, împreună cu a șaptea, conform căreia lucrurile văzute în interiorul mai multor unghiuri se văd mai clar (vezi nota 5), sau altfel zis se văd mai clar acele lucruri asupra cărora cad mai multe raze vizuale, explică limitarea puterii de rezoluție a ochiului uman deoarece un obiect care ar fi mai îndepărtat se vede nu numai mai mic ci și mai puțin clar (se disting mai puține amănunte). Se pare că ideea structurii discrete a razelor vizuale a apărut la Euclid în urma relațiilor științifice cu Herophilos, care este considerat primul specialist în anatomie. Printre alte rezultate ale sale este și cel conform căruia retina are o structură discretă formată din mai multe elemente. Totuși ideea nu a evoluat pe parcursul timpului, deoarece modelele matematice ale proceselor fiziologice nu s-au mai analizat și au fost uitate. Pornind de aici, Euclid introduce conceptul de diferență de vedere a unui obiect în funcție de faptul dacă acesta este văzut în centrul câmpului vizual sau într-o zonă laterală, presupunând diverse intervale unghiulare dintre raze în diverse regiuni ale câmpului vizual. În felul acesta, corpurile sunt văzute prin intermediul unui număr variabil de raze vizuale și de aceasta depinde acuratețea vederii. Pe de altă parte sunt văzute sub unghiuri diferite, ceea ce implică mărimi aparente diferite ale obiectelor. Se spune că Theon (dar nu e întrutotul sigur), în introducerea la revizuirea sa a *Opticii* lui Euclid prezintă chiar unele demonstrații experimentale și mintale pe care acesta le făcea în fața auditoriului său întru susținerea ideilor sale. Prezentăm mai jos, parțial această introducere, așa cum există ea în [3] (dar și în [1] și [2]):

Prefața la "La Perspective" (Optica de Euclid), apărută în 1663 în traducere în limba franceză de Freart de Chantelou.

Deoarece prima din cele 12 axiome pe care le prezintă Euclid aici, la începutul „Perspectivei" este contestată de toți cei din zilele noastre care au scris despre aceleași lucruri, am considerat necesar înainte de a intra în subiectul acestui tratat, să arăt cauzele pentru care faimosul nostru autor a trebuit să creadă că vederea se face prin emisie de raze vizuale și să stabilească acest principiu ca întrutotul adevărat, cu toate că astăzi opinia comună este că vederea are loc numai prin recepția unor imagini („espèces") pe care toate obiectele vizibile le trimit spre ochi ca și spre o oglindă.

Astfel, motivele incomparabilului nostru geometru sunt deduse și explicate pe înțelesul tuturor, într-o prefață greacă care este atașată la originalul acestei opere și care aparține lui **Theon din Alexandria**, el fiind „prezentatorul" operei. Iată ce spune el.

Când Euclid prezenta auditoriului prin ce mijloace se produce vederea, el avea obiceiul de a propune, ca recreație, câteva exemple familiare din experiența cotidiană care să ajute pe cei care-l ascultau să înțeleagă adevărul principiilor pe baza cărora el a stabilit teoremele „Opticii" sale.

Primul lucru pe care l-a presupus este că lumina se propagă în linie dreaptă; și pentru a da o demonstrație evidentă, îi punea să observe cum se formează umbrele pe care toate corpurile le lasă pe un plan sau să observe razele Soarelui trecând printr-o fereastră sau printr-o altă deschizătură și conchidea că ceea ce se observă sunt urmări ale emisiilor în linie dreaptă; de unde el trăgea concluzia asupra adevărului axiomei sale.

El mai spunea că „claritatea radiantă a focului" este cauza datorită căreia corpurile apar cu părți iluminate și cu părți umbrite, aruncând pe plan umbre egale cu corpul, sau uneori mai mari, sau alteori mai mici. Cele care sunt egale cu corpul sunt așa deoarece corpul și sursa de lumină sunt de aceeași mărime și deoarece pentru ele razele care pleacă de la extremitățile sursei sunt paralele și astfel nu micșorează și nu măresc nimic la umbră, lăsând-o la fel de mare cu corpul care o produce. Dar când umbrele sunt mai mici decât corpul, asta vine din cauză că sursa de lumină este mai mare decât corpul; deoarece razele de la extremitățile sursei sunt concurente și se apropie unele de altele, astfel că umbra se micșorează în spatele corpului; și în fine, se deduce că dacă umbra se mărește, este necesar ca sursa de lumină să fie mai mică decât corpul care lasă umbra; toate acestea arată că nu s-ar putea face astfel dacă razele de lumină nu s-ar propaga în linie dreaptă.

Și iată aici experiența evidentă și dovada indubitabilă pe care el o dădea.

O lampă pregătită în acest scop fiind aprinsă, îi așeza în fața ei unele corpuri opace, cum ar fi o plăcuță de lemn în mijlocul căreia exista o deschidere mică, această deschidere putând fi potrivită precis în dreptul lămpii; se potrivea paralel, în fața acestei plăcuțe, la o distanță convenabilă, o altă plăcuță din lemn, de aceeași mărime, astfel încât razele luminoase ale focului lămpii, trecând prin deschiderea primei plăcuțe să poată să întâlnească cea de-a doua deschidere; deci în felul acesta el făcea ca audiența să remarce că razele lămpii au mers toate în linie dreaptă.

Prin urmare, stabilind cu certitudine maximă că orice lumină se propagă în linie dreaptă, el conchide în mod necesar că razele vizuale care pleacă din ochi sunt toate, emisii în linie dreaptă; dar, cu toate acestea, astfel încât între ele există o distanță care le separă printr-un anumit interval – ceea ce ne împiedică să vedem toate părțile unui obiect în același moment. Și iată și exemplul pe care îl dădea.

Adesea se întâmplă ca un ac sau un alt lucru mic, asemănător, să cadă pe pământ; căutându-l cu mare atenție fără a-l vedea decât după mai mult timp și după mai multe revederi ale locului în care a căzut, cu toate că în calea lui nu se află niciun obstacol, în fine, după oarecare vreme, ochiul nostru îl descoperă. De aici trebuie să deducem că dacă nu vedem acul, atunci nu vedem nici pe direcția precisă pe care se află el și prin urmare toate porțiunile de loc la care ne uităm nu se văd distinct în același moment; dacă n-ar fi așa atunci am zări acul exact în momentul în care începem să-l căutăm.

Euclid propunea auditoriului încă un exemplu: o filă de carte pe care e sigur că cititorul nu vede imediat, în același timp, fiecare literă în parte, având în vedere că de multe ori când vrem să citim ceva anume trebuie un anumit timp pentru a găsi, deoarece razele vizuale fiind linii disjuncte una față de alta, cu ajutorul lor nu putem vedea literele care se află în spațiul gol care separă razele. De unde rezultă, în mod necesar, că ochiul nu vede obiectele decât prin detalii ale părților sale și nu în întregimea lui pe care crede că-l vede; ceea ce este un efect al unei vivacități foarte mari ale razelor vizuale care își îndeplinesc funcția cu o rapiditate admirabilă.

Aceste două exemple, cel al acului care trebuie căutat mult timp și de mai multe ori și al literelor de pe o filă de carte pe care suntem obligați s-o examinăm distinct și cu o atenție atât de mare, reprezintă de asemenea argumente pentru respingerea opiniei celor care cred că imaginea obiectelor pe care le vedem se formează în același timp, în întregul ei, în ochiul nostru. Căci, spunea Euclid, dacă ar fi adevărat că obiectele își oferă, deodată, imaginea lor în întregime vederii noastre, atunci de ce acul nu se vede dintr-o dată sau litera pe care o căutăm pe o filă scrisă nu este găsită în același moment cu cel în care ne uităm pe foaie. A zice că aceasta provine din faptul că privitorul a avut probabil spiritul distras de altceva, nu pare plauzibil pentru că el caută! (...)

Iată motivele pentru care marele nostru geometru Euclid își susține opinia asupra emisiei razelor vizuale spre obiecte. Și pentru a contrazice în același timp și pe filosofii care susțin recepția imaginilor în pupila ochiului el indică, cu finețe, ca exemplu însăși organul vederii căruia Natura i-a dat o formă cu totul contrară cu cea a altor organe de simț. Mai precis, recepțiile acestor organe cum ar fi nasul, gura și urechile se face în acest scop prin Concave, dar ochiul, fiind o figură sferică și Convexă, operațiile sale trebuie să fie diferite de cele ale altor simțuri, deoarece forma organului său nu e la fel.

După aceste raționamente și exemple este inutil să mai lungim vorba, pentru că oricum, bazele esențiale ale Teoremelor Perspectivei rămân la fel și într-un caz și în altul: căci emisia de raze vizuale spre obiect sau recepția imaginilor emise de obiecte în ochi nu schimbă cu nimic geometria formării unghiurilor vizuale și nici ceea ce privește intervalele de distanță dintre obiecte, acestea nedepinzând de modul de funcționare în exterior al simțului vederii.

***

Reconstrucția primei definiții, așa cum este făcută în [7], ne permite să afirmăm că în concepția lui Euclid, distribuția razelor vizuale nu este numai discretă ci și neuniformă, concentrația lor spațială fiind mai mare în centrul conului vizual, care corespunde centrului retinei, lucru descoperit într-adevăr atunci de Herophilos. Acesta folosea, printre altele, termenul „arachnoeides" care nu era întâmplător, deoarece centrul unei pânze de păianjen are într-adevăr mijlocul mai dens.

2. și că forma spațiului închis de razele vizuale este un con cu vârful în ochi și baza la limita la care se văd lucrurile[4];

3. și că lucrurile se văd acolo unde razele vizuale ajung și că acele lucruri la care razele vizuale nu ajung , nu se văd;

4. și că lucrurile văzute în interiorul unui unghi mai mare apar mai mari, în timp ce lucrurile văzute în interiorul unghiurilor mai mici, apar mai mici, iar cele văzute în interiorul unor unghiuri egale, apar a fi de aceleași dimensiuni;

5. și că lucrurile văzute de razele superioare apar mai sus, în timp ce lucrurile văzute de razele inferioare apar mai jos;

6. și similar, că lucrurile văzute de razele dinspre dreapta apar mai la dreapta, în timp ce cele văzute de razele dinspre stânga apar mai la stânga[5];

---

[4] În prima definiție al textului grec din [4] cuvintele „*εὐθείας γραμμὰς*" înseamnă literal "linie dreaptă" și este tradus în latină prin "*lineas rectas*" care se poate traduce prin "segmente rectilinii" și nu "drepte" precum a arătat deja Euclid în "Elemente" de a nu concepe dreptele ca nelimitate a priori. În [8] definițiile 2 și 3 afirmă că linia este o lungime fără lățime, iar extremitățile unei linii sunt puncte. În aceasta a doua definiție a Opticii, segmentele rectilinii devin "raze vizuale" care pentru autor, reprezintă elementele fundamentale ale teoriei sale. Ele constituie un model funcțional pentru a pune în legătură teoria cu realitatea pe care intenționează să o descrie.

În varianta revăzută a lui Theon nici măcar în prima definiție nu se vorbește de segmente, ci de raze vizuale care sunt emise din ochi și se propagă în linie dreaptă. Theon, adeseori folosește în locul cuvintelor "raze vizuale", termenul *οψισ* pe care l-au utilizat și Platon și Aristotel pentru a desemna fluidul vizual. Astfel avem construit un model al percepției vizuale care se face în interiorul unui con umplut cu raze vizuale discrete, mai concentrate în centrul câmpului vizual, care în totalitatea lor formează fluidul vizual. Care este natura reală a acestor raze și unde se află în ochi exact vârful acestui con, nu ni se spune.

V. Ronchi în [9] vede în această definiție și în conceptul conului vizual fundamentarea teoriei perspectivei, dezvoltată apoi prin teoremele care urmează.

A. Lejeune în [10] afirmă mai mult că pentru a obține un model matematic al vederii era chiar necesar să se considere ca fasciculul conic de raze să aibă vârful în ochi, iar alegerea legată de mersul razelor nu era esențială pentru că matematica modelului nu depinde în niciun fel de sensul propagării luminii, ceea ce nici nu este abordat de către Euclid.

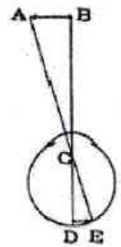
[5] Definițiile 4,5 și 6 se referă la relația dintre elementele geometrice și spațiale (reprezentate prin unghiuri și direcții) și operațiile noastre mintale asupra stabilirii poziției și mărimii obiectelor în spațiu și conțin concepte de natură fiziologică și psihologică. Ele includ într-adevăr faptul că mărimea unui obiect rezultă din mărimea

7. iar lucrurile văzute în interiorul mai multor unghiuri se văd mai clar[6].

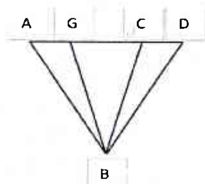
unghiului sub care se vede obiectul și că raționamentul se face în funcție de mărimea imaginii, dar se bazează și pe achizițiile experimentale anterioare, deoarece subiectul pune în legătură mărimea obiectului cu distanța la care se crede că se află obiectul, ceea ce este privit și judecat de asemenea și în relație cu alte obiecte cunoscute care sunt în jurul nostru.

Ovio [5] subliniază astfel, cât de necesar este să se facă distincția dintre mărimea reală și mărimea aparentă și cum educația are un rol important, deoarece subiectul poate emite o judecată, care fiind bazată pe o mărime aparentă, poate fi greșită. De aceea peste tot se spune "par" sau "apar", adică e vorba de aparențe.

Retina fiind sferică, ceea ce se afirmă în aceste definiții este aproape evident, deoarece "într-un cerc unghiurile sunt proporționale cu arcele; considerând astfel imaginea în forma sa cea mai simplă, mărimea imaginii apare proporțională cu unghiul care o cuprinde" (ca în figura de mai jos).



[6] Această definiție a suscitat și ea mai multe comentarii. În [2], Danti dă următoarele lămuriri: „Adevărul pe care îl presupune această definiție constă în faptul că dacă, de exemplu, conform figurii de mai jos, ochiul este în B și obiectul văzut AD este văzut sub trei unghiuri ABG, GBC și CBD, în acest caz AD este văzut mai clar (se văd mai multe amănunte ale obiectului) decât dacă ar fi văzut numai sub unghiul ABD, deoarece sub



acest unghi razele vizuale AB și BD cad numai asupra a două puncte A și D. Dar dacă vedem sub cele trei unghiuri amintite, razele vizuale ajung în punctele A, G, C și D și deoarece obiectul AD este văzut în interiorul mai multor unghiuri, va fi văzut mai în amănunt (mai clar), văzându-se trei părți AG, GC și CD distinct la întâlnirea cu unghiurile lor de vedere și care nu vor fi văzute numai sub unghiul ABD.

[Toate razele au viteze egale.
Obiectele nu se pot vedea sub orice unghi].[7]

Teoreme

1. Nimic din ceea ce este văzut, nu este văzut dintr-odată în întregimea sa[8] (fig.1)[9]

Fie obiectul văzut AD și fie B, ochiul de la care pleacă razele vizuale BA, BG, BK și BD. Așa că, atât timp cât razele

Cei ce spun însă că se văd mai clar acele lucruri care se văd sub cât mai multe unghiuri (nu ca în exemplul acesta, ci în general), spun că unghiul ABD se poate divide în mai multe unghiuri decât GBC și ajung să facă confuzie între această definiție și prima parte a celei de-a patra definiții. Având în vedere că autorul (Euclid) știe foarte bine ce spune această definiție și anume că lucrurile care se văd sub unghiuri mai mari apar mai mari, iar aceasta că sub mai multe unghiuri se văd mai clar, fără să transfere în mod inutil acea a patra definiție pe ultimul loc, autorul având bine definite obiectivele sale, el se va folosi în acest sens de acestea în teorema a doua."

[7] Ultimele două definiții apar în [5], iar în [4] sunt trecute între paranteze drepte, ceea ce înseamnă că în unele cărți care au stat la baza ediției [4] există aceste definiții, în altele nu există. În ediția greacă originală, atribuită lui Euclid, ele nu există.

[8] Ceea ce urmează reprezintă teoremele Opticii lui Euclid. În textul grec original ele nu sunt numerotate. În această traducere le-am numerotat pentru a face referințe la ele mai ușor. În revizuirea lui Theon sunt numerotate și sunt 57.

Prima teoremă este legată de fiziologia vederii și este o consecință a structurii discrete a retinei dar și a fasciculului vizual. În [6] se afirmă că teorema exprimă un fenomen fiziologic care depinde de neuniformitatea retinei, de timpul de acomodare al vederii și de un element psihic imponderabil. Ver Eecke conchide că Euclid face o eroare demonstrând teorema pe baza primei definiții. De altfel și alți comentatori ai operei lui Euclid au sesizat acest lucru. De exemplu în [3], unde fiecare teoremă este însoțită de comentarii se afirmă că chiar începând cu Alhazen (Ibn al Haytham, traducătorul în arabă a lui Euclid), la începutul sec. al XI-lea deja se reformulează puțin enunțul acestei teoreme afirmând că obiectele *mari* nu pot fi văzute la fel în întregimea lor. Adică se referă doar la obiecte mari, de unde rezultă că cele mici pot fi văzute foarte bine, în același moment, în întregimea lor, clar. Dacă obiectul este mare, la un moment dat, unele părți din obiect se văd mai bine, altele nu. Mai departe, polonezul Witelo, în sec. al XIII-lea afirmă că niciun obiect vizibil nu se vede în întregime în mod egal. Diferența față de Euclid este mică dar una este să susții că unele părți ale obiectului privit la un moment dat nu pot fi văzute și alta să susții că nu se văd cu aceeași claritate.

[9] Toate figurile și notațiile de pe figuri au fost preluate din *The Optics of Euclid* translated by Harry Edwin Burton, Journal of the Optical Society of America, vol.35 no.5, May 1945.

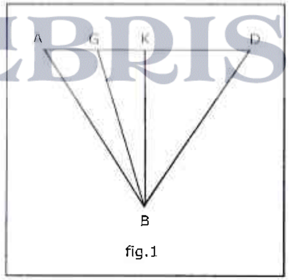


fig.1

vizuale așa cum cad ele, diverg una față de alta, ele nu pot să cadă în linie continuă pe AD; deci vor fi spații și pe AD pe care razele vizuale nu vor cădea. Deci AD nu va fi văzut în întregimea sa în același moment. Dar se pare că el poate fi văzut în întregimea sa deoarece razele vizuale se deplasează rapid.

2. Obiectele aflate mai aproape se văd mai clar decât obiectele de aceleași dimensiuni aflate mai departe (fig.2)

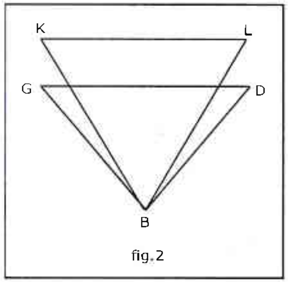


fig.2

Fie B ochiul și GD și KL obiectele văzute; și trebuie să înțelegem că ele sunt egale și paralele și fie GD mai aproape de ochi; fie razele vizuale BG, BD, BK și BL. Astfel, nu putem spune că razele care cad din ochi pe KL vor trece prin punctele G și D. Astfel, în triunghiul BDLKGB[10], linia KL trebuie să fie mai lungă decât GD; dar ele au fost presupuse de lungimi egale. Deci GD este văzut de mai multe raze vizuale decât KL. Deci GD se va vedea mai clar decât KL; astfel, obiectele văzute în interiorul mai multor unghiuri, se văd mai clare[11].

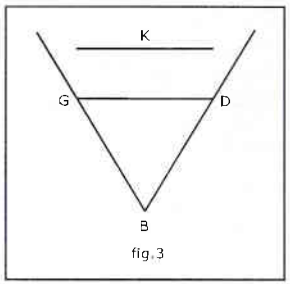


fig.3

3. Pentru fiecare obiect văzut există o anumită limită a distanței dincolo de care el nu se mai vede (fig.3)

[10] În sensul că G și D ar fi intersecțiile dintre GD și BK, respectiv BL.

[11] Este clar, teorema se bazează pe definiția a 7-a, obiectul GD se vede sub mai multe unghiuri decât KL, deci se vede mai clar.

Fie B ochiul și fie GD obiectul văzut. Eu spun că GD plasat la o anumită distanță, nu va mai putea fi văzut. Fie ca GD să se afle la mijlocul divergenței razelor vizuale, la limita la care se află K. Astfel, nici una din razele de la B nu va cădea pe K. Și lucrurile pe care nu cad razele vizuale, nu sunt văzute. Deci fiecare obiect văzut se caracterizează printr-o anumită limită de distanță, care dacă este atinsă, obiectul respectiv nu mai este văzut.[12]

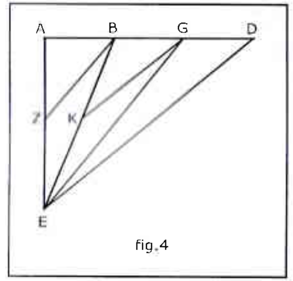


fig.4

4. Dintre intervalele egale localizate pe o aceeași linie dreaptă, cele care sunt văzute de la o distanță mai mare, apar mai scurte (fig.4)

Fie AB, BG și GD intervale egale de-a lungul aceleași linii drepte și fie dusă perpendiculara AE, pe care E reprezintă ochiul. Eu spun că AB va apărea mai lung decât BG și BG mai lung decât GD. Fie razele vizuale care cad, EB, EG, și ED și prin punctul B fie BZ dusă paralel cu linia dreaptă GE. Acum AZ este egal cu EZ. Astfel, odată ce paralela la GE, care este o latură a triunghiului AEG, dreapta BZ a fost dusă, rezultă că EZ este în același raport cu ZA ca și GB cu BA. Astfel, după cum am spus, AZ este egal cu ZE. Dar latura BZ este mai lungă decât ZA; deci e mai lungă și decât ZE. Deci unghiul ZEB este mai mare decât unghiul ZBE; și unghiul ZBE

[12] În [5] și [6] există critici ale acestei demonstrații. Ovio afirmă că principiul enunțat în această teoremă este just, dar distanța limită față de ochi la care se mai văd obiectele nu se datorează faptului că unele obiecte sunt foarte mici și cad în intervalul dintre razele vizuale, ci mai degrabă faptului că de la un asemenea obiect vine o „cantitate" foarte mică de raze vizuale care incidente pe retină nu sunt capabile să producă o impresie. Probabil că Ovio nu avea cunoștință de relațiile lui Euclid cu Herophilos care l-a informat pe Euclid despre structura și sensibilitatea retinei. Astfel, Euclid, tocmai pe aceasta își bazează demonstrația și nu pe concentrația razelor vizuale care provin de la obiect și ajung la ochi. Cam pe aceeași poziție se situează și Ver Eecke. Deci din nou, o teoremă cu conținut mai ales fiziologic, a cărei demonstrație geometrică se pare că e „iluzorie".

este egal cu unghiul BEG; și unghiul ZEB este mai mare decât unghiul GEB. Astfel, AB se va părea mai lung decât BG. Din nou, în același mod, dacă prin punctul G se va duce o linie paralelă la DE, BG va părea mai lung decât GD.[13]

5. *Obiecte de mărimi egale aflate la distanțe diferite apar inegale și cel care se află mai aproape de ochi apare totdeauna mai mare* (fig.5)

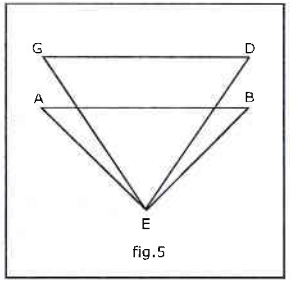


fig.5

Fie atunci două obiecte de mărimi egale, AB și GD și fie ochiul indicat prin E, față de care obiectele se află la distanțe diferite și fie AB mai aproape. Eu spun că AB va apărea mai mare. Fie razele vizuale care cad EA, EB, EG și ED. Acum, deoarece lucrurile văzute în interiorul unor unghiuri mai mari apar mai mari și unghiul AEB este mai mare decât unghiul GED, AB va apărea mai mare decât GD.[14]

6. *Linii paralele, când sunt văzute de la distanță, apar a nu fi la o distanță constantă una față de alta* (fig.6)

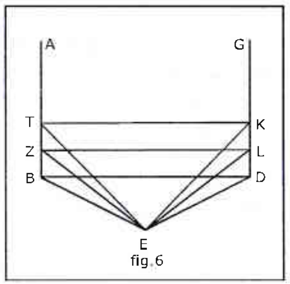


fig.6

Fie două linii paralele, AB și GD și fie ochiul indicat prin E. Eu spun că AB și GD apar a nu fi paralele și că intervalul mai apropiat dintre ele apare totdeauna mai mare decât cel

[13] Această teoremă este prima care deschide o serie de teoreme care stau la baza teoriei perspectivei în artele vizuale. Demonstrația ei se bazează pe rezultatele obținute în „Elemente", iar afirmația acestei teoreme a avut deja aplicații în arta antică. De exemplu se știe că lățimea spiralei care înfășoară trunchiul Columnei lui Traian este din ce în ce mai mare pe măsură ce spirala urcă pentru ca privitorul de jos să vadă basorelieful de aceeași mărime oriunde pe columnă. La fel, din același motiv, capul personajelor aflate pe statuile ecvestre se face mai mare decât normal, pentru ca privit de pe pământ să dea aparența unei mărimi normale.

[14] Conținutul teoremei, cât și demonstrația sunt evidente și se bazează pe definiția 4.

mai îndepărtat. Fie razele care cad EB, EZ, ET, ED, EL și EK și fie ca aceste puncte să fie unite prin liniile drepte BD, ZL și TK. Acum, fiindcă unghiul BED este mai mare decât unghiul ZEL, BD apare mai lung decât ZL. Din nou, deoarece unghiul ZEL este mai mare decât unghiul TEK, ZL apare mai lung decât TK. Deci, intervalul BD apare mai mare decât intervalul ZL, iar intervalul ZL mai mare decât intervalul TK. Deci, linii aflate la distanță constantă una față de alta nu ni se vor mai părea paralele, ci ni se va părea că distanța dintre ele se modifică.

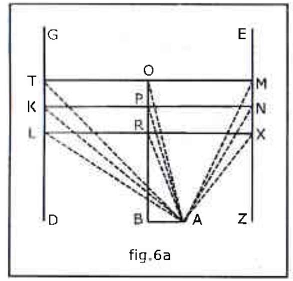


fig.6a

În spațiul situat la nivel mai ridicat, fie perpendiculara AB dusă din punctul A pe planul aflat dedesubt și fie acolo paralelele LX, KN și TM. Eu spun că la fel, liniile GD și EZ vor apărea ca nefiind paralele (fig. 6a)

Fie perpendiculara BR dusă din B pe LX și fie BR continuat până la O și fie razele vizuale care cad AL, AK, AT, AX, AN și AM și fie duse AR, AP și AO. Acum, deoarece linia dreaptă AR, de la un punct mai ridicat, a fost dusă pe RX, atunci AR este perpendicular pe RX și AO pe OM și AP pe PN. Deci, ARX, APN și AOM sunt triunghiuri dreptunghice și deoarece PN este egal cu RX și deoarece PA este mai lung decât AR, unghiul XAR este mai mare decât unghiul PAN. Deci, RX va apărea mai lung decât PN. Similar, RL va apărea mai lung decât PK. Deci, toată linia LX va apărea mai lungă decât toată linia KN. Și astfel, liniile DG și ZE vor părea că au o distanță variabilă între ele.[15]

[15] Și această teoremă este una din cele fundamentale ale teoriei perspectivei. Ea se referă la efectul bine cunoscut care se observă atunci când privim la șinele unei căi ferate rectilinii și avem impresia că undeva în depărtare, șinele se unesc, sau copacii de la marginea unui drum rectiliniu, undeva departe în fața noastră se întâlnesc, ceea ce înseamnă că, aparent, distanța dintre două drepte paralele, dacă privim în lungul acestor drepte, se micșorează. Euclid demonstrează teorema în două situații: mai întâi ochiul este situat în același plan cu cel al paralelelor, apoi în exteriorul acestui plan.

7. Obiecte de mărimi egale aflate pe aceeași linie dreaptă, dacă nu sunt așezate unul lângă altul și dacă nu se află la distanțe egale față de ochi, apar neegale (fig.7)

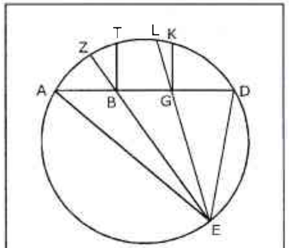


fig.7

Fie atunci două obiecte de mărimi egale, AB și GD, de-a lungul aceleiași linii drepte, dar nu unul lângă celălalt, și la distanțe inegale față de ochiul E, și fie razele vizuale care cad EA și ED și fie EA mai lung ca ED. Eu spun că GD va apărea mai mare ca AB. Fie razele care cad pe ele, EB și EG și fie cercul, AED, circumscris triunghiului AED. Și fie liniile drepte BZ și GL adăugate în continuarea liniilor drepte EB și EG, și din punctele B și G fie desenate liniile drepte egale BT și GK, sub unghiuri drepte. Și AB este egal cu GD, dar de asemenea unghiul ABT este egal cu unghiul DGK. Și astfel arcul AT este egal cu arcul DK. Deci, arcul KD este mai mare decât arcul ZA. Astfel LD este și mai mare decât ZA. Dar pe arcul ZA stă unghiul AEZ, iar pe arcul LD stă unghiul LED. Deci unghiul LED este mai mare decât unghiul AEZ. Dar AB este văzut în interiorul unghiului AEZ, iar GD este văzut în interiorul unghiului LED. Deci, GD va apărea mai mare ca AB.

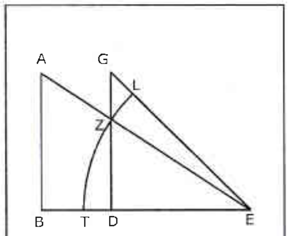


fig.8

8. Linii de lungimi egale și paralele, dacă sunt plasate la distanțe inegale față de ochi nu sunt văzute în aceeași proporție cu distanțele (fig. 8)

Fie două linii AB și GD, la distanțe neegale față de ochiul E. Eu spun că, așa după cum apare, BE nu se află în aceeași relație cu ED ca și GD cu AB. Astfel, fie razele vizuale care

Efectul este însă mai slab pe măsură ce ochiul se îndepărtează de planul celor două paralele, ceea ce Euclid nu mai demonstrează.

cad AE și EG și cu E ca centru, la distanța EZ, fie desenat arcul LZT. Acum, deoarece triunghiul EZG este mai mare decât sectorul EZL și deoarece triunghiul EZD este mai mic decât sectorul EZT, triunghiul EZG comparat cu sectorul EZL, are un raport mai mare decât triunghiul EZD comparat cu sectorul EZT. Și, pe de altă parte, triunghiul EZG, comparat cu triunghiul EZD, are un raport mai mare decât sectorul EZL când este comparat cu sectorul EZT și când punem împreună, triunghiul EGD, comparat cu triunghiul EZD, are un raport mai mare decât sectorul ELT comparat cu sectorul EZT. Dar așa cum este triunghiul EDG față de triunghiul EZD, tot așa este GD față de DZ. Dar GD este egal cu AB și așa cum este AB față de DZ, la fel este și BE față de ED. Acum, BE în comparație cu ED are un raport mai mare decât sectorul ELT în comparație cu sectorul EZT. Și așa cum este un sector față de celălalt, la fel este și unghiul LET față de unghiul ZET. Astfel, linia dreaptă BE comparată cu linia dreaptă ED are un raport mai mare decât unghiul LET comparat cu unghiul ZET. Și prin unghiul LET este văzut GD, iar prin unghiul ZET este văzut AB. Deci linii de lungimi egale nu sunt văzute în aceeași proporție cu distanțele.[16]

[16] Este una din teoremele cu cele mai importante aplicații în teoria perspectivei și a fost subiectul multor discuții pe parcursul timpului. De aceea, ne oprim mai mult asupra acestei chestiuni. Vom cita din lucrarea [11]: „În optica antică și în teoria artei (ca și în filosofie, dar aici numai sub formă de analogii), întâlnim în mod constant observația că liniile drepte se văd ca și cum ar fi curbe, iar curbele ca linii drepte; de aceea coloanele trebuie supuse operației de modificare continuă a diametrului de-a lungul axei longitudinale (ἔντασις), pentru ca ele să nu apară curbate (operație cu efecte destul de slabe, bineînțeles în perioada clasică). Tot din acest motiv, arhitravele și stilobații trebuie construiți curbați pentru a evita impresia de încovoiere. Și într-adevăr, curburile familiare al templului Doric atestă consecințele practice ale acestor rezultate.

Optica antică, cea care și-a transpus descoperirile sale în aplicații, era, prin principiile sale inițiale, într-o oarecare opoziție cu perspectiva liniară. Și dacă atunci se înțelegea atât de clar distorsionarea sferică a formelor, aceasta rezulta doar din (sau cel mult corespundea la) încă mai importanta recunoaștere a distorsiunii magnitudinii. Și din acest motiv optica antică se potrivește mult mai bine cu structura factuală a senzației optice subiective, decât teoria perspectivei din Renaștere. Deoarece în optica antică se consideră câmpul vederii ca fiind sferic, ea susține totdeauna, fără excepții, *9. Obiectele dreptunghiulare, când sunt văzute de la distanță, apar rotunjite* (fig. 9)

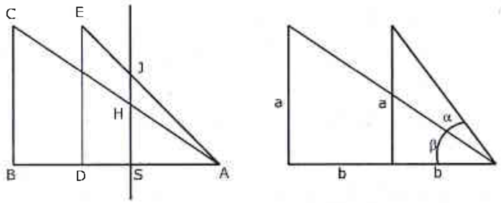
Fie dreptunghiul BG, așezat vertical, văzut de la distanță. Acum, deoarece fiecare lucru care este văzut are o anumită limită de distanță dincolo de care el nu se mai vede, unghiul G

---

că magnitudinile aparente (adică proiecțiile obiectelor pe sfera vizuală) nu sunt determinate de distanța de la obiect la ochi, ci mai curând numai de mărimea unghiurilor vizuale. Astfel, relația dintre magnitudinile obiectelor se poate, strict vorbind, exprima numai în grade de arc sau de unghi și nu în funcție de distanță.

Într-adevăr, teorema a 8-a a lui Euclid, preîntâmpină explicit orice părere contrară.

Euclid afirmă că diferența aparentă dintre două magnitudini egale percepute de la distanțe diferite nu este determinată de raportul acestor distanțe, ci mai degrabă de diferența mult mai mică dintre unghiurile vizuale.



Pe această figură se vede diferența între construcțiile în „perspectivă liniară" și „perspectivă unghiulară": în perspectiva liniară (stânga) mărimile aparente HS și JS sunt invers proporționale cu distanțele AB și AD; în perspectiva unghiulară (dreapta) mărimile aparente α și $\alpha+\beta$ nu sunt invers proporționale cu distanțele 2b și b.

Aceasta este diametral opus cu doctrina care stă la baza teoriei moderne a perspectivei în construcții, familiară în formularea lui Jean Pélerin, cunoscut și sub numele Viator (1445 – 1524(?)), care în *„De Artificiale Perspectiva"* (1505) spune: „Les quantités et les distances ont concordable différences" (Mărimile și distanțele variază direct proporțional). Și probabil, e mai mult decât un simplu accident faptul că în Renaștere, în parafraze la Euclid și chiar traduceri, a 8-a teoremă a fost ori în întregime eliminată, ori „amendată până și-a pierdut în totalitate înțelesul originar". Evident, contradicția s-a simțit între *„perspectiva naturalis or comunis"* a lui Euclid care a căutat pur și simplu să formuleze matematic legile vederii naturale (și astfel, ale magnitudinii aparente funcție de mărimea unghiului vizual) și *„perspectiva artificialis"* dezvoltată între timp, care, contrar, a încercat să ofere o metodă practică pentru construcția imaginilor pe o suprafață bidimensională. E clar, această contradicție poate fi rezolvată numai prin abandonarea axiomei unghiurilor (definiția 4). A recunoaște această definiție înseamnă a expune crearea unei imagini în perspectivă la o operație imposibilă, deoarece o sferă, evident, nu poate fi desfășurată pe o suprafață."

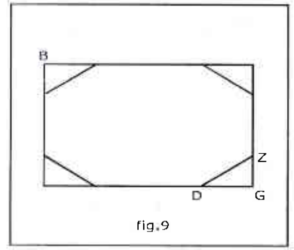


fig.9

nu este văzut, ci numai punctele D și Z sunt vizibile. La fel se va întâmpla și în cazul celorlalte unghiuri. Deci întregul obiect va apărea rotunjit.[17]

10. În cazul unor suprafețe plane aflate sub nivelul ochiului, părțile mai îndepărtate apar mai sus (fig. 10)

Fie ochiul A, la un nivel mai ridicat decât BEDG și fie razele care cad AB, AE, AD și AG din care fie AB perpendicular pe planul aflat dedesubt. Eu spun că GD apare mai sus ca DE și DE mai sus ca BE. Fie punctul Z considerat undeva pe BE și fie dusă perpendiculara ZL. Deoarece razele vizuale cad pe ZL înainte de a atinge ZG, fie ca linia AG să întâlnească ZL în punctul L, linia AD în punctul T și linia AE în punctul K. Acum, deoarece L este mai sus ca T și T mai sus decât K, iar G este pe aceeași linie ca și L, iar D pe aceeași linie ca și T, iar E pe aceeași linie ca și K și, deoarece, între liniile AG și AD, este văzut DG, și între liniile AD și AE, este văzut DE, GD apare mai sus ca DE. Și, similar, DE va apărea mai sus ca BE; căci lucruri văzute de raze aflate mai sus, apar mai sus. Și este clar că lucruri văzute pe un plan mai sus vor apărea ca fiind concave[18].

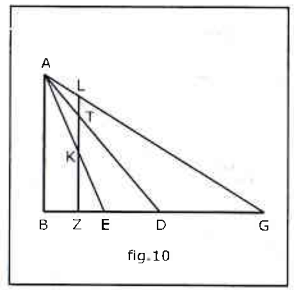


fig.10

---

[17] În [5] se consideră demonstrația ca fiind eronată, aceasta nefăcând altceva decât să repete enunțul. Totuși, demonstrația are o logică, deoarece fasciculul vizual fiind format dintr-o concentrație mai mare de raze vizuale în centru, „vede" mai bine mijlocul dreptunghiului, iar marginile se văd mai puțin clar din cauză că spre margini concentrația de raze vizuale scade. Acest lucru, după cum am văzut, este datorat structurii retinei, despre care Euclid avea cunoștință de la Herophilos, ceea ce autorul lucrării [5], Ovio, se pare că nu știa.

[18] *Κοῖλος* în limba greacă înseamnă literalmente „concav", dar și „profund". S-ar putea admite și acest înțeles pentru a da un sens acceptabil propoziției. Heiberg consideră

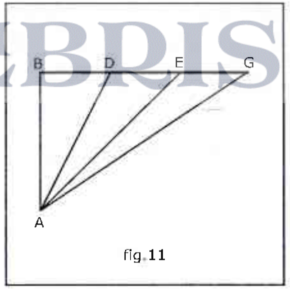


fig.11

11. În cazul suprafețelor plane aflate deasupra nivelului ochiului, părțile mai îndepărtate apar mai jos (fig.11)

Fie ochiul indicat prin A, într-o poziție mai joasă decât planul BG și fie razele care cad AB, AD, AE și AG și dintre acestea fie AB perpendiculară pe planul considerat. Eu spun că GE apare mai jos decât ED. Acum, conform teoremei enunțate mai înainte, raza AG este mai jos decât AE, AE mai jos ca AD și AD mai jos ca AB. Dar între liniile GA și AE, este văzut GE și între EA și AD este văzut ED, și între DA și AB este văzut DB. Deci GE apare mai jos decât ED și ED mai jos decât DB.[19]

12. În cazul unor linii care se întind înainte, cele din dreapta par a fi înclinate spre stânga, iar cele din stânga par a fi înclinate spre dreapta (fig. 12)

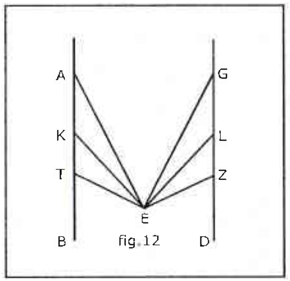


fig.12

Fie văzute două linii AB și GD și fie ochiul indicat prin E, din care cad razele ET, EK, EA, EZ, EL și EG. Eu spun că EZ, EL și EG par a fi înclinate spre stânga și ET, EK și EA spre dreapta. Deoarece EZ este mai la dreapta decât EL, iar EL mai la dreapta decât EG, rezultă că EG pare înclinat spre stânga lui EL, iar EL spre stânga lui EZ. Similar, EA, EK și ET par a fi înclinate spre dreapta[20].

că avem de-a face aici cu *loci corupti*, iar Ver Eecke, în mod rezonabil, spune că avem de-a face cu o interpolare a unui scolast.

[19] Teoremele 10 și 11 sunt consecințe ale definiției 5.

[20] Această teoremă pare a fi o repetare a teoremei 6. În realitate, aceasta constituie o simplificare și o extindere (segmentele considerate nu sunt neapărat paralele). Ea se va dovedi extrem de utilă pentru demonstrarea teoremelor referitoare la relativitatea mișcării.

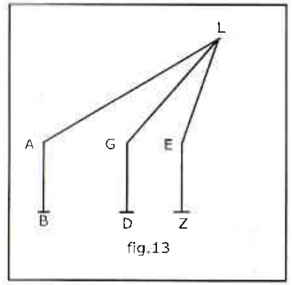


fig.13

13. În cazul unor linii de lungimi egale, aflate sub nivelul ochiului, cele care se află mai departe par a fi mai înalte (fig. 13)

Fie liniile de lungimi egale AB, GD și EZ și fie ochiul indicat prin L, situat deasupra acestor linii și fie razele care cad LA, LG și LE. Eu spun că AB apare mai înalt ca GD și GD mai înalt decât EZ. Așadar, întrucât LA este deasupra lui LG și LG deasupra lui LE și întrucât punctele A, G și E sunt pe liniile LA, LG și LE și întrucât liniile AB, GD și EZ pleacă din punctele A, G și E, atunci AB pare mai înalt decât GD, iar GD mai înalt ca EZ.

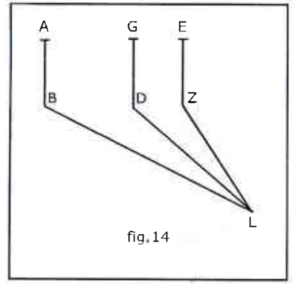


fig.14

14. În cazul liniilor de lungimi egale care se află deasupra nivelului ochiului, cele care sunt mai departe apar mai mici (fig. 14).

Fie liniile de lungimi egale AB, GD și EZ aflate deasupra nivelului ochiului L. Eu spun că AB apare mai mic decât GD, iar GD mai mic ca EZ. Fie razele care cad LB, LD și LZ. Așadar, întrucât raza LB este mai jos decât LD și LD mai jos decât LZ, iar punctele B, D și Z sunt pe liniile LB, LD și LZ și deoarece liniile AB, GD și EZ pornesc de la B, D și Z, atunci AB apare mai mic decât GD, iar GD mai mic decât EZ.[21]

15. În cazul obiectelor aflate sub nivelul ochiului, obiecte care sunt unul mai înalt decât celălalt, dacă ochiul se

[21] Teoremele 12 , 13 și 14 sunt teoreme pure de perspectivă și demonstrația lor se bazează pe definițiile 5 și 6. Faptul că dintre liniile de lungimi egale, unele apar mai înalte și altele mai puțin înalte poate fi interpretat și că unele apar mai sus, altele mai jos, dacă liniile se află în realitate așa cum se presupune pe figurile aferente demonstrațiilor, având în vedere conținutul definițiilor amintite anterior.

apropie de obiecte, cel mai înalt pare a deveni mai înalt, iar dacă ochiul se îndepărtează, cel mai mic pare a deveni mai înalt (fig.15)

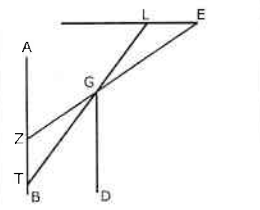


fig.15

Fie două linii inegale AB și GD și fie AB mai înalt ; fie E ochiul și din el fie raza EZ care cade prin G. Acum, deoarece ZB și GD sunt văzute sub nivelul ochiului și sub raza EZ, AB apare mai înalt ca GD cu lungimea AZ. Fie ochiul mișcat mai aproape în L și fie din el raza LT care cade prin G. Atunci, deoarece GD și TB sunt văzute sub nivelul ochiului și sub raza LT, AB va apărea mai înalt decât GD cu lungimea AT. Și din punctul E, AB este văzut mai înalt cu lungimea AZ, iar AT este mai lung decât AZ. Deci, dacă ochiul se apropie de obiecte, cel mai înalt pare a câștiga în înălțime, iar dacă ochiul se îndepărtează, cel mai scurt pare a crește.

16. În cazul obiectelor de mărimi inegale, aflate deasupra nivelului ochiului, obiecte care se înalță unul deasupra celuilalt, dacă ochiul se apropie de obiecte, obiectul mai scurt pare a crește în înălțime, iar dacă ochiul se îndepărtează, cel mai înalt pare a crește în înălțime (fig. 16)

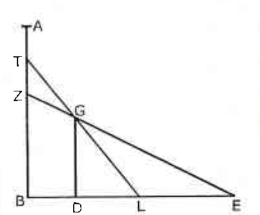


fig.16

Fie liniile AB și GD, de lungimi inegale, și dintre acestea fie AB mai înaltă. Fie ochiul reprezentat prin E și din acesta fie raza EZ care cade prin G. Acum, deoarece liniile ZB și GD se află sub raza EZ, atunci BZ și GD apar a fi egale una față de alta. Deci, AB apare mai înalt decât GD cu lungimea AZ. Acum să mutăm ochiul mai aproape și fie el în punctul L, din care raza LT cade prin G. Acum deoarece liniile BT și GD se află sub raza LT și deoarece ZB și GD se află sub raza EZ și deoarece ZA este mai lung decât AT, atunci dacă ochiul se apropie de obiecte, obiectul mai scurt, aparent va crește în înălțime, iar dacă ochiul se îndepărtează, cel mai înalt, aparent va crește.

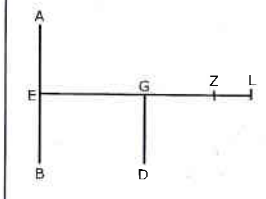


fig.17

17. În cazul a două obiecte, dintre care unul se înalță deasupra celuilalt, dacă ochiul se apropie de cel mai scurt sau se îndepărtează de el sub un unghi drept, cel mai înalt va apărea totdeauna că se înalță deasupra celui mai scurt, cu aceeași cantitate (fig. 17)

Fie două linii de lungimi inegale, AB și GD și fie AB mai lungă și fie ochiul Z, aflat pe o linie sub un unghi drept la capătul lui GD, adică în G. Eu spun că indiferent dacă ochiul Z se apropie sau se îndepărtează, dacă el este pe aceeași linie orizontală, AB va pare mai înalt ca GD cu aceeași cantitate. Fie pentru aceasta, raza ZE care cade prin G. Astfel, AB apare mai înalt ca GD cu lungimea AE. Fie acum ochiul mișcat și fie el îndepărtat în L pe linia orizontală. întrucât raza care cade din ochiul L va trece prin punctul G și va continua până la punctul E, AB va apărea deasupra lui GD cu aceeași cantitate.[22]

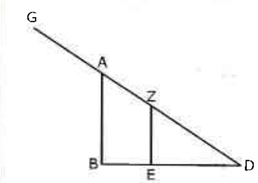


fig.18

[22] Teoremele 15, 16 și 17 se referă la diferența aparentă dintre mărimile unor obiecte de dimensiuni diferite, atunci când poziția ochiului față de aceste obiecte se schimbă. Afirmațiile acestor teoreme sunt mai profunde decât rezultă din demonstrațiile lor propriu-zise, pentru că de fapt sunt mai multe situații diferite care depind de poziția relativă a ochiului și a obiectelor, situații care nu sunt menționate în enunțuri. Există erori de subapreciere sau supraapreciere a diferenței de dimensiune între obiecte în timpul mișcării ochiului în raport cu obiectele și aceste diferențe depind de poziționarea relativă a obiectelor și a ochiului, dar și de modul de mișcare a ochiului față de obiecte.

18. A ști cât de mare este o înălțime dată când soarele strălucește (fig.18)

Fie înălțimea dată AB, pe care vrem s-o aflăm cât este. Fie D ochiul și fie GA o rază a soarelui care cade prin capătul liniei AB și fie ea prelungită până la locul în care se află ochiul D. Fie DB umbra lui AB. Fie o a doua linie EZ care întâlnește raza, dar de loc iluminată de aceasta, sub capătul Z al liniei. Deci în triunghiul ABD a fost inclus un al doilea triunghi EZD. Astfel, cum este DE la ZE așa este și DB la BA. Dar raportul dintre DE și EZ este cunoscut; atunci este cunoscut și raportul dintre DB și BA. în plus, DB este cunoscut; deci AB este de asemenea cunoscut.

19. A ști cât de mare este o înălțime dată când soarele nu strălucește (fig.19)

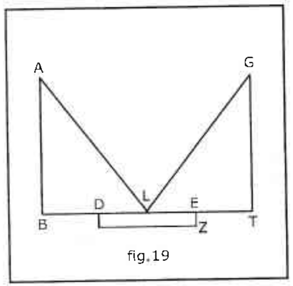


fig.19

Fie înălțimea dată AB și fie ochiul G și fie necesară aflarea înălțimii lui AB atunci când soarele nu strălucește. Fie plasată o oglindă DZ și fie DB prelungit în linie dreaptă continuă cu ED, până la punctul B, care este capătul lui AB și fie o rază care cade GL, din ochiul G și fie ea reflectată spre punctul în care îl atinge pe A, capătul lui AB și fie ET prelungirea lui DE și din G fie perpendiculara GT dusă pe ET. Acum, deoarece GL este raza care cade și LA a fost reflectată, ea a fost reflectată sub un unghi egal cu cel al razei care cade, după cum am spus în *Catoptrica* ; astfel, unghiul GLT este egal cu unghiul ALB. Dar și unghiul ABL este egal cu unghiul GTL; și unghiul care a rămas, LGT este egal cu unghiul care a rămas, LAB. Deci triunghiul ALB este echiunghiular cu triunghiul GLT. Dar laturile triunghiurilor echiunghiulare sunt proporționale. Deci, așa cum este GT la TL, așa este și AB la BL. Dar raportul GT la GL este cunoscut; deci

și raportul BA la BL este cunoscut. Dar LB este cunoscut, și astfel AB este cunoscut.

20. A ști cât de mare este adâncimea dată (fig. 20)

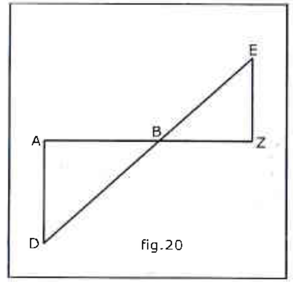


fig.20

Fie adâncimea dată AD și fie ochiul E și fie necesar să se știe cât de mare este adâncimea. Fie o rază care cade de la soare prin fața ochiului, întâlnind planul în punctul B și adâncimea în punctul D. Și fie BZ prelungirea din B în linie dreaptă și fie EZ perpendiculara dusă din E pe linia orizontală BZ. Acum, deoarece unghiul EZB este egal cu unghiul BAD și unghiul ABD este egal cu unghiul EBZ, cel de-al treilea unghi BEZ este de asemenea egal cu ADB. Astfel, triunghiul ADB este echiunghiular cu triunghiul BEZ. Astfel, laturile vor fi proporționale. Atunci, așa cum este EZ la ZB, așa este și DA la AB. Dar raportul EZ la ZB este cunoscut; deci și raportul DA la AB este cunoscut. Și de asemenea AB este cunoscut. Și astfel, AD este cunoscut.

21. A ști cât de mare este lungimea dată (fig. 21)

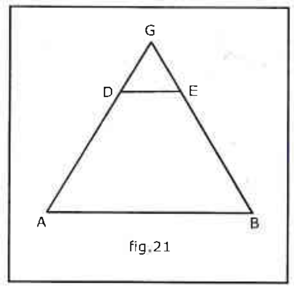


fig.21

Fie lungimea dată AB și fie ochiul G și fie necesar să se știe cât de mare este lungimea AB. Fie razele care cad GA și GB și lângă ochiul G fie un punct D luat undeva pe raza GA și prin punctul D, fie dusă linia orizontală DE, paralel cu AB. Acum, deoarece DE a fost dusă paralel la BA care este una din laturile triunghiului ABG, așa cum este GD la DE, așa este și GA la AB. Dar raportul GD la DE este cunoscut; deci și raportul AG la AB este cunoscut. Şi AG este cunoscut. Astfel, AB este de asemenea cunoscut.[23]

22. Dacă un arc de cerc este plasat în acelaşi plan ca şi ochiul, arcul pare a fi o linie dreaptă (fig.22)

Fie BG arcul care se află în acelaşi plan cu ochiul A, din care fie razele care cad, AB , AD , AE , AZ , AL , AT şi AG. Eu spun că arcul BG, pare a fi o linie dreaptă. Fie K centrul arcului şi fie desenate liniile drepte KB, KD , KE , KZ , KL , KT şi KG. Acum, deoarece KB este văzut în limitele unghiului KAB, şi KD în limitele unghiului KAD, KB va apărea mai lung decât KD, şi KD mai lung decât KE, şi KE mai lung decât KZ, şi, pe de altă parte, KG va apărea mai lung decât KT, şi KT mai lung decât KL, şi KL mai lung decât KZ. Ţinând cont de acestea, KA rămânând o linie dreaptă, BG este totdeauna o perpendiculară. Şi aceleaşi lucruri se vor întâmpla de asemenea şi în cazul unui arc concav.

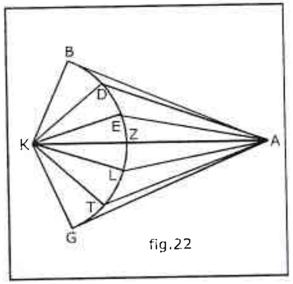


fig.22

Altfel. Se pot spune aceste lucruri referitor la razele vizuale însăşi, cum că raza dintre ochiul A şi diametru este cea mai scurtă şi că raza mai aproape de el este totdeauna mai scurtă decât una mai îndepărtată. Şi aceleaşi lucruri se întâmplă când

[23] Teoremele 18, 19, 20 şi 21 sunt teoreme de telemetrie, adică se referă la metodele practice de măsurare de la distanţă a lungimilor şi înălţimilor. Ceea ce se afirmă în teorema 18 se ştia încă din vremea lui Thales (cca 624 – 547 î.Hr.) şi s-a folosit şi înaintea lui de către egipteni care măsurau înălţimea piramidelor pe baza lungimii umbrei lăsate de un baston şi în acelaşi timp de o piramidă. Se întâlnesc în perioada antichităţii o sumedenie de metode de asemenea măsurători şi ele şi-au adus o contribuţie esenţială la proiectarea şi construcţia unor aparate perfecţionate şi foarte exacte care s-au folosit de-a lungul timpului şi unele dintre ele şi în zilele noastre. Demonstraţia teoremei 19 face uz de o oglindă şi e singura din Optica lui Euclid care face uz de oglindă. Fiindcă se vorbeşte în demonstraţie de *Catoptrica*, unii cercetători presupun că demonstraţia (şi poate şi teorema) a fost adăugată de Euclid (?) după scrierea *Catoptricii*. În [3] întâlnim o critică a demonstraţiei în sensul că metoda propusă este greoaie şi se prezintă o altă metodă de determinare a unei înălţimi în absenţa luminii directe a Soarelui (dar nu în întuneric!).

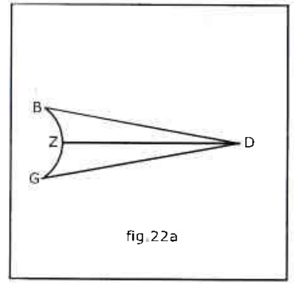


fig.22a

AZ este perpendicular pe diametru. In aceste condiţii arcul dă impresia unei linii drepte. Şi în special dacă acesta ar fi observat de la distanţă mare astfel încât să nu percepem curbura. Ţinând cont de acestea, frânghiile nu prea întinse, când sunt văzute lateral par că se lasă în jos, dar văzute de jos par drepte, şi de asemenea umbrele inelelor aflate în acelaşi plan cu sursa de lumină devin drepte.

Altfel. Dacă un arc de cerc este plasat în acelaşi plan ca şi ochiul, arcul pare a fi o linie dreaptă (fig. 22a)

Fie BG arcul şi fie D ochiul în acelaşi plan cu arcul BG, din care fie razele care cad DB, DZ şi DG. Astfel, deoarece nimic din ceea ce este văzut, nu este văzut dintr-o dată în întregime, BZ este o linie dreaptă. La fel şi ZG. Astfel, întregul arc BG, va părea drept.[24]

23. Dintr-o sferă văzută în orice mod de un ochi, se vede totdeauna mai puţin de o emisferă, şi partea din sferă care se vede ne apare ca un arc de cerc (fig. 23)

Fie o sferă cu centrul în A şi fie B - ochiul. Şi fie unite A şi B şi fie un plan care trece prin linia AB. Astfel, el va produce o secţiune circulară. Fie

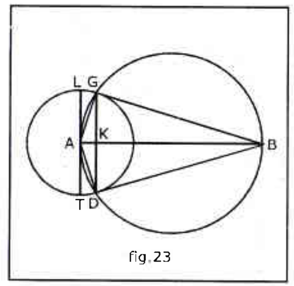


fig.23

[24] Pe parcursul unor ediţii precedente, demonstraţia acestei teoreme apare în mod diferit. Astfel, în [1], [2] şi [12] ca primă variantă a demonstraţiei este prezentată varianta din „*Opticum Recensio Theonis*" (prezentă aici ca varianta a treia), iar prima variantă din Optica lui Euclid este atribuită lui Pappus din Alexandria. În [3] găsim o altă demonstraţie, proprie a autorului, care se pare că e mai clară decât celelalte. În [5] se face o discuţie amănunţită asupra tuturor demonstraţiilor şi scoliilor din diverse ediţii şi se ajunge la concluzia că niciuna din aceste demonstraţii nu este satisfăcătoare. În [6] se afirmă că manuscrisele prezintă lacune care corup înţelesul textelor, iar în [13] se afirmă pur şi simplu că demonstraţiile sunt false.